Contrôle final (Durée: 2 heures)

Exercice 1 : (4 points)
Soient deux variables aléatoires X et Y liées par la relation $Y = 2 - 3X$.
Les caractéristiques numériques de la variable aléatoire X sont données :
$E(X) = -1\,; Var(X) = 4$. Déterminer :

1. l'espérance mathématique et la variance de la variable Y ;
2. la covariance et le coefficient de corrélation des variables X, Y.

Exercice 2 : (3 points)
Soient deux variables aléatoires X et Y dont la densité conjointe est donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}xy & \text{si} \quad 0 < x < 2; 1 < y < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver la loi de probabilité du couple aléatoire (U, V) où $U = XY$ et $V = XY^2$.

Exercice 3 : (4 points)
Soient deux variables aléatoires X et Y discrètes, indépendantes qui suivent toutes les deux des lois de Poisson de paramètres respectives $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ définies par :

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda};\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{et}\ P(Y = k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu};\ \forall k \in \mathbb{N}$$

1. Former la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X et en déduire son espérance mathématique et sa variance.
2. Trouver la loi de probabilité de la variable aléatoire somme $Z = X + Y$.

Exercice 4 : (5 points)
On considère deux variables aléatoires X et Y continues, indépendantes qui suivent toutes les deux des lois exponentielles de paramètres respectives $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ avec $\lambda \neq \mu$. On donne leurs fonctions de densité de probabilité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0; \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y} & \text{si} \quad y \geqslant 0; \\ 0 & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$$

1. Former la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X et en déduire son espérance mathématique et sa variance.
2. Trouver la densité de probabilité de la variable aléatoire somme $S = X + Y$.
3. Calculer la probabilité $P(\frac{X}{Y} < z)$ avec z est un réel non nul. En déduire la densité de la variable aléatoire $Z = \frac{X}{Y}$.

Exercice 5 : (4 points)
Soient une suite de n variables aléatoires de Bernoulli $X_i; i = 1, 2, \cdots, n$, indépendantes de même paramètre p. On considère la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

1. Montrer que $E(X) = np$ et $Var(X) = np(1-p)$.
2. Soit la variable aléatoire $f_n = \frac{X}{n}$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que (f_n) converge en probabilité vers p.

Bonne chance !