ENSA-Tétouan

2013/2014

CI1

Corrigés du contrôle final de Probabilités et Statistique

Exercice 1 :

1°) $E(Y) = E(2 - 3X) = 2 - 3E(X) = 5$

$Var(Y) = Var(2 - 3X) = (-3)^2 Var(X) = 36$

2°) $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= E[X(2-3X)] + 5$

$= E(2X - 3X^2) + 5$

$= 2E(X) - 3E(X^2) + 5$

Or $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$, donc $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2$

d'où $E(X^2) = 4 + (-1)^2 = 5$

Alors $Cov(X, Y) = -2 - 15 + 5 = -12$;

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{-12}{\sqrt{4 \times 36}} = -1$$

ce qui n'est que très naturel, puisque X et Y sont liés par une relation fonctionnelle linéaire à facteur négatif affecté à X.

Exercice 2 :

Soit la transformation $\begin{cases} u = xy \\ v = xy^2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \frac{u^2}{v} \\ y = \frac{v}{u} \end{cases}$

L'ensemble

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 < x < 2 \ ; \ 1 < y < 3\right\}$$

correspond à $C = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / 0 < \frac{u^2}{v} < 2 \ ; \ 1 < \frac{v}{u} < 3\right\}$

ou $C = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ u^2 < 2v \ ; \ u < v < 3u\right\}$

On a : $g(u,v) = f\left(x(u,v) \ ; \ y(u,v)\right) |J|$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{v}$$

On obtient

$$g(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{8} \frac{u^2}{v} \cdot \frac{v}{u} \cdot \frac{1}{v} \ ; \ \text{si } u^2 < 2v \ ; \ u < v < 3u \\ 0 \qquad ; \ \text{sinon} \end{cases}$$

ou $$g(u,v) = \begin{cases} \frac{u}{8v} \ ; \ \text{si } u^2 < 2v \ ; \ u < v < 3u \\ 0 \ ; \ \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3 :

1°) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Sa fonction génératrice des moments est :

$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

car $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!}$ est le développement en série de Maclaurin de $e^{\lambda e^t}$.

Donc $M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$; $\forall t \in \mathbb{R}$

$$M'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} \Rightarrow M'(0) = \lambda = E(X)$$

$$M''(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)} \Rightarrow M''(0) = \lambda + \lambda^2$$

d'où $E(X^2) = \lambda + \lambda^2$ et $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$
$= \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$

2°) Soit $Z = X + Y$ avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$

$$P(Z = z) = P(X+Y = z) = \sum_{k=0}^{z} P(X = k ; Y = z-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{z} P(X=k).P(Y=z-k) \quad \text{puisque } X \text{ et } Y \text{ indép.}$$

$$= \sum_{k=0}^{z} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{z-k}}{(z-k)!} e^{-\mu} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{z} \frac{\lambda^k \mu^{z-k}}{k!(z-k)!}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{z} \frac{z!}{k!(z-k)!} \cdot \frac{1}{z!} \cdot \lambda^k . \mu^{z-k}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} \sum_{k=0}^{z} C_z^k \lambda^k \mu^{z-k} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^z}{z!} \quad (\forall z \in \mathbb{N})$$

On en déduit que $Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exercice 4 :

1) Fonction génératrice des moments de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(t-\lambda)x} dx$$

cette intégrale converge que si $t - \lambda < 0$

$\iff t < \lambda$

si $t < \lambda$ $\quad E(e^{tX}) = \lambda \left[\dfrac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_0^{+\infty}$

$$= \lambda \left(0 - \frac{1}{t-\lambda} \right) = \frac{-\lambda}{t-\lambda}$$

Donc $\boxed{M(t) = \dfrac{-\lambda}{t-\lambda} = \dfrac{\lambda}{\lambda - t} \ \forall t \in]-\infty, \lambda[}$

$M'(t) = \dfrac{+\lambda}{(\lambda - t)^2} \Rightarrow M'(0) = E(X) = \dfrac{+\lambda}{\lambda^2}$

$= \dfrac{1}{\lambda}$

$$M''(t) = \frac{2\lambda(\lambda - t)}{(\lambda - t)^4} = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

$$M''(0) = E(X^2) = \frac{2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

2°) La densité de S s'écrit :

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(s-x)\, dx = \int_{\substack{x \geq 0 \\ s-x \geq 0}} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(s-x)} dx$$

Pour $s \geq 0$, on a

$$f_S(s) = \int_0^s \lambda\mu\, e^{-\lambda x} e^{-\mu(s-x)}\, dx$$

$$= \lambda\mu\, e^{-\mu s} \int_0^s e^{x(\mu-\lambda)}\, dx$$

$$= \frac{\lambda\mu\, e^{-\mu s}}{\mu-\lambda}\left(e^{s(\mu-\lambda)} - 1\right)$$

$$= \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\left(e^{-\lambda s} - e^{-\mu s}\right) \quad ; \quad s \geq 0$$

et $f_S(s) = 0$ si $s < 0$.

3°) $$P\left(\frac{X}{Y} < z\right) = \iint_C f(x,y)\, dx\, dy$$

où $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x}{y} < z\right\}$

$$P\left(\frac{X}{Y} < z\right) = \int_0^\infty \lambda\left(\int_{\frac{x}{z}}^\infty \mu\, e^{-\mu y}\, dy\right) e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda\, e^{-\left(\lambda + \frac{\mu}{z}\right)x}\, dx = \frac{\lambda z}{\lambda z + \mu}.$$

* On a :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right) = \iint_C f(x,y)\, dx\, dy$$

où z est fixé

Comme $P\left(\frac{X}{Y} < z\right) = \frac{\lambda z}{\lambda z + \mu} = F_Z(z)$

la densité $f_Z(z)$ de $Z = \frac{X}{Y}$ est donnée, pour $z \in]0, +\infty[$, par

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{\lambda(\lambda z+\mu) - \lambda^2 z}{(\lambda z+\mu)^2} = \frac{\lambda\mu}{(\lambda z+\mu)^2}$$

Exercice 5 :

1°) $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec X_i des variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

Donc $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$

De même $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = np(1-p)$

2°) On a $E(f_n) = p$ et $Var(f_n) = \frac{p(1-p)}{n}$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|f_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

La quantité $p(1-p)$ est maximale pour $p = \frac{1}{2}$ et elle est égale à $\frac{1}{4}$; donc $P(|f_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

ou $$P(|f_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Par conséquent $$P(|f_n - p| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$