Contrôle de Rattrapage (Durée: 2 heures)

Exercice 1 : (5 points)

1. Soit une variable aléatoire discrète X qui suit une loi binomiale $B(n,p)$ de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$, donnée par :
$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k};\ 0 \leqslant k \leqslant n.$$
Former sa fonction génératrice des moments $M_X(t)$ et en déduire son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $Var(X)$.
2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes, indépendantes qui suivent respectivement des lois binomiales $B(n_1,p)$ et $B(n_2,p)$. Montrer que leur somme X_1+X_2 suit une binomiale $B(n_1+n_2,p)$.

Exercice 2 : (5 points)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes dont chacune suit une loi normale centrée réduite $N(0,1)$ de densité de probabilité $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la densité conjointe du couple aléatoire (U,V) où $U = 2X$ et $V = X - Y$.
2. En déduire les densités marginales de U et de V.

Exercice 3 : (10 points)
I. Soit une variable aléatoire continue X qui suit une loi gamma de paramètres α et β $(\alpha, \beta > 0)$, notée $\Gamma(\alpha,\beta)$ et de densité de probabilité donnée par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, est la fonction Eulérienne de second espèce.

1. Montrer que pour tout réel strictement positif α, on a : $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
2. Déterminer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X. En déduire son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $Var(X)$.
3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement des lois gamma $\Gamma(\alpha_1,\beta)$ et $\Gamma(\alpha_2,\beta)$ $(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta > 0$, avec le même $\beta)$.
Montrer, alors, que la variable aléatoire $Z = X_1 + X_2$ suit une loi gamma $\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$.

II. On considère, maintenant, une variable aléatoire continue Y qui suit une loi bêta de paramètres α et β $(\alpha,\beta > 0)$, notée $Be(\alpha,\beta)$ et de densité de probabilité donnée par :
$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} & \text{si} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
où $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$, est la fonction Eulérienne du premier espèce. Elle est reliée à la fonction gamma par la relation : $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Elle vérifie, donc, $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$.

1. Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ et la variance $Var(Y)$ de la variable aléatoire Y.
2. Montrer que si une variable aléatoire Y suit une loi bêta $Be(\alpha,\beta)$, alors la variable aléatoire $T = 1 - Y$ suit une loi bêta $Be(\beta,\alpha)$.

Bonne chance!