Université Abdelmalek Essaâdi **Année universitaire : 2013/2014**
ENSA de Tétouan **Première année de cycle ingénieur**
Module: Probabilités et Statistique **Prof. Mohamed El Merouani**

Exercices de Probabilités

Exercice 1 :
On procède à n expériences indépendantes dans chacune d'elles l'événement A apparaît avec une probabilité p.
Dresser le tableau de la loi de de la variable aléatoire X, nombre des réalisations de l'événement $\overline{A}$ contraire de A dans n expériences, et trouver son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 2 :
Une cellule d'ordinateur a enregistré un nombre binaire de rang n, dont chaque signe prend indépendamment des autres et avec la même probabilité la valeur 0 ou 1. La variable aléatoire X est le nombre de signes "1" dans l'écriture du nombre binaire.
Trouver la probabilité des événements $\{X = m\}$; $\{X \geqslant m\}$ et $\{X < m\}$.

Exercice 3 :
Par une voie de communication on transmet k messages contenant respectivement $n_1, n_2, \cdots, n_k$ signes binaires ("0" ou "1"). Les signes prennent indépendamment l'un ou l'autre et avec une probabilité $\frac{1}{2}$ les valeurs 0 ou 1. Chaque signe est perturbé (c'est-à-dire remplacé par le signe opposé) avec une probabilité p. Pour le codage on emploie un code qui corrige les erreurs d'un ou de deux signes (pratiquement avec une ceritude totale). Après la correction, la présence d'une erreure ne serait-ce que dans un signe rend tout le message erroné.
Trouver la probabilité P pour que ne serait-ce qu'un des k messages soit erroné.

Exercice 4 :
Le montage d'un appareil est assuré avec 4 pièces indentiques ; on a en tout 10 pièces disponibles, dont 6 sont en bon état et 4 défectueuses ; il est impossible de distinguer les pièces de l'extérieur. De leur lot disponible on tire 15 pièces (une de trop pour constituer la "reserve").
Trouver la probabilité pour que moins de quatre des pièces tirées soient bonnes.

Exercice 5 :
Un lot comporte a pièces défectueuses et b en bon état. Pour le contrôle on tire du lot n pièces. Si pas moins de m d'entre elles sont défectueuses, tout le lot est rebuté.
Trouver la probabilité de l'événement $A = \{$le lot est rebuté$\}$.

Exercice 6 :
Une urne contient 100 boules blanches et 400 noires. On tire de l'urne $n = 10$ boules.
Trouver par deux procédés la probabilité pour que trois d'entre elles soient blanches :

1. en utilisant la formule de la loi hypergéométrique
2. en utilisant une approximation de celle-ci par une loi binomiale

Exercice 7 :
En théorie de la fiabilité des dispositifs techniques on recourt souvent en tant que loi de répartition de la durée du service sans aléas à la loi de Weibull de fonction de répartition

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x^{\alpha}}; (x \geqslant 0),$$

où $\beta > 0$ est une certaine constante ; α, un nombre entier positif.
Trouver

1. la densité $f(x)$,
2. l'espérance mathématique et la variance.

Exercice 8 :
Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y. La variable aléatoire X est répartie selon une loi normale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La répartition de la variable aléatoire Y est uniforme dans l'intervalle $(0, 1)$.
Écrire les expréssions de la densité conjointe $f(x, y)$ et de la fonction de répartition $F(x, y)$ du couple aléatoire (X, Y).

Exercice 9 :
Démontrer que si la répartition d'une variable aléatoire X est binomile de paramètres n et p, son espérance mathématique est $E(X) = np$, et sa variance $Var(X) = npq$, avec $q = 1 - p$.

Exercice 10 :
Démontrer que pour n expériences indépendantes dans lesquelles l'événement A se réalise avec des probabilités $p_1, p_2, \cdots, p_n$, l'espérance mathématique est $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i$, et sa variance $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$, avec $q_i = 1 - p_i$.

Exercice 11 :
On considère n expériences indépendantes dans lesquelles l'événement A apparaît avec une probabilité p. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la fréquence Y de l'événement A. Établir la marge des valeurs pratiquement possibles de la fréquence.

Exercice 12 :
Démontrer que l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X suivant une loi hypergéométrique de paramètres n, a et b sont égales respectivement à

$$E(X) = \frac{na}{a+b};$$

$$Var(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Exercice 13 :
Une urne contient 5 boules blanches et 7 noires ; on en tire à la fois 6 boules. La variable aléatoire X est le nombre de boules noires parmi celles qui ont été tirées.
Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

Exercice 14 :
On procède à plusieurs expériences indépendantes dans chacune desquelles l'événement A se produit avec une probabilité p. Les expériences sont poursuivies tant que l'événement A apparaît k fois, après quoi elles cessent. La variable aléatoire X est le nombre d'expériences qu'il faut réaliser.
Trouver son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

Exercice 15 :
Le montage d'une installation à fiabilité accrue se fait avec k pièces homogènes de haute qualité. Avant d'être présentée au montage, chaque pièces subit des essais de toute sorte et indépendamment des autres s'avère de haute qualité avec une probabilité p. Une fois que k pièces de haute qualité sont sélectionnées, les essais de nouvelles pièces cessent. La reserve des pièces est pratiquement illimitée.
Trouver l'espérance mathématique μ_X et la variance σ_X^2 de la variable aléatoire X (nombre de pièces mises à l'essai).

Exercice 16 :
On réalise n expériences dépendantes dans lesquelles l'événement A peut ou ne peut pas apparaître. La variable aléatoire X est le nombre d'apparitions de cet événement A dans la série de ces expériences.

1. Trouver l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
2. Dans le cas où ces expériences sont indépendantes, donner la variance de la variable aléatoire X.
3. Si on suppose que ces expériences sont dépendantes, calculer la variance de la variable aléatoire X dans ce cas.

Exercice 17 :
Une urne contient a boules blanches et b noires. On tire de cette urne au hasard k boules. La variable aléatoire X est le nombre de boules blanches parmi les boules tirées de l'urne.
Sans recourir à la loi qui suit la variable aléatoire X (loi hypergéométrique), calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

Exercice 18 :
On considère n variables aléatoires discrètes $X_1, X_2, \cdots, X_n$ indépendantes et distribuées selon des lois de Poisson de paraètres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.
Montrer que leur somme $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est aussi distribuée selon la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Exercice 19 :
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev majorer la probabilité pour que la variable aléatoire X d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ s'écarte de μ à moins de 3σ.

Exercice 20 :
On réalise un grand nombre n d'expériences indépendantes dans chacune desquelles la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $(1, 2)$.
On considère la variable aléatoire $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ moyenne arithmétique des valeurs observées de la variable aléatoire X.
Sur la base de la loi des grands nombres établir de quel nombre a s'approche (converge en probabilités) la variable Y lorsque $n \longrightarrow \infty$.
Évaluer l'erreur maximale pratiquement possible de l'égalité $Y \approx a$.

Exercice 21 :
Un corps est pesé sur une balance d'analyse. La valeur réelle, que nous ne connaissons pas, de sa masse est égale à a. La présence des erreurs rend aléatoire le résultat de chaque pesée suivant une loi de probabilité normale de paramètres a et σ. Pour réduire les erreurs le corps est pesé n fois et on retient comme valeur approchée de sa masse la moyenne arithmétique des résultats des n pesées : $Y(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Trouver l'espérance mathématique, la vriance et l'écart-type de de la v.a. $Y(n)$.
2. Combien faut-il de pesées pour rendre l'erreur quadratique moyenne de la masse dix fois plus faible ?

Exercice 22 :
Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ_X et σ_X.

1. Trouver la densité de probabilité $g(y)$ de la variable aléatoire $Y = |X|$.
2. On suppose, par la suite, que $\mu_X = 0$. Quelle sera la densité de probabilité $g(y)$ de la variable aléatoire $Y = |X|$ dans ce cas ?
   Trouver, dans ce cas, la densité de probabilité $h(z)$ de la variable aléatoire $Z = X^2$.

Exercice 23 :
Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y toutes les deux normales de paramètres respectives $\mu_X = \mu_Y = 0$; et σ_X, σ_Y. Trouver la densité de probabilité de la somme de leurs valeurs absolues $Z = |X| + |Y|$

Exercice 24 :
I.- Soit une variable aléatoire X qui a pour densité $f(x)$. Trouver la densité $g(y)$ de la variable aléatoire inverse $Y = \frac{1}{X}$.
II.- Une variable aléatoire X suit la loi de Cauchy de densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}; (-\infty < x < \infty).$$

Trouver la densité $g(y)$ de la variable inverse $Y = \frac{1}{X}$.
III.- Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $\mu = 0$ et σ. Trouver la densité $g(y)$ de la variable inverse $Y = \frac{1}{X}$.

Exercice 25 : (Cet exercice utilise le résultat de l'exercice 2 de la série 3 de T.D.)
Trouver la loi de probabilité du rapport $Z = \frac{Y}{X}$ de deux variables aléatoires indépendantes X et Y qui suivent des lois normales de paramètres $\mu_X = \mu_Y = 0$ et $\sigma_X; \sigma_Y$.