Corrigés du Contrôle de Rattrapage

Exercice 1 :

1. Soit $X \rightsquigarrow B(n,p)$.

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^t)^n (1-p)^{n-k} \\ &= \left[pe^t + 1 - p\right]^n = \left(pe^t + q\right)^n \text{ avec } q = 1-p \end{aligned}$$

Donc $M_X(t)$ existe $\forall t \in \mathbb{R}$ et on a $M_X(t) = (pe^t + q)^n$.
À partir de $M_X(t)$, déterminons l'espérance et la variance de X :

$$M'_X(t) = npe^t(pe^t+q)^{n-1} \Rightarrow M'_X(0) = np(p+q)^{n-1} = np$$

Donc $E(x) = np$.

$$M''_X(t) = np\left(e^t(pe^t+q)^{n-1} + e^t(n-1)(pe^t+q)^{n-2}pe^t\right)$$

$$\Rightarrow M''_X(0) = np(1+(n-1)p) = np + n(n-1)p^2 = np + n^2p^2 - np^2$$
$$\Rightarrow Var(X) = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2 = np(1-p) = npq$$

2. $1^{\text{ère}}$ **méthode :**
On a :

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{A} P(X_1 = i, X_2 = j)$$

où $A = \{(i,j)/0 \leqslant i \leqslant n_1, 0 \leqslant j \leqslant n_2, i+j=k\}$. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{A} P(X_1 = i).P(X_2 = j) \\ &= \sum_{A} C_{n_1}^i p^i (1-p)^{n_1 - i} C_{n_2}^j p^j (1-p)^{n_2 - j} \\ &= \sum_{A} C_{n_1}^i C_{n_2}^j p^{i+j} (1-p)^{n_1+n_2-i-j} \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{A} C_{n_1}^i C_{n_2}^j = \sum_{i+j=k=0}^{n_1+n_2} C_{n_1}^i C_{n_2}^j = C_{n_1+n_2}^k$
d'où $P(X_1 + X_2 = k) = C_{n_1+n_2}^k p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}$
Donc $X_1 + X_2$ est bien une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n_1+n_2, p)$.
$2^{\text{ème}}$ **méthode :**
On peut utiliser le théorème d'unicité disant que "*La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire détermine la loi de cette variable. Autrement dit, si deux variables*

aléatoires admettant même fonction génératrice des moments, alors elles ont même loi".

$$M_{X_1+X_2}(t) = E(e^{(X_1+X_2)t}) = E(e^{(X_1)t}.e^{(X_2)t})$$

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, les variables $e^{(X_1)t}$ et $e^{(X_2)t}$ le sont aussi, doù $M_{X_1+X_2}(t) = E(e^{(X_1)t}).E(e^{(X_2)t}) = M_{X_1}(t).M_{X_2}(t)$.
Or, d'après la $1^{\text{ère}}$ question, $M_X(t) = (pe^t + q)^n$ pour $X \rightsquigarrow B(n,p)$, donc

$$M_{X_1+X_2}(t) = \left(pe^t + q\right)^{n_1} . \left(pe^t + q\right)^{n_2} = \left(pe^t + q\right)^{n_1+n_2}$$

qui n'est autre qu'une fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n_1 + n_2$ et p.
C'est-à-dire que $X_1 + X_2 \rightsquigarrow B(n_1 + n_2, p)$

Exercice 2 :

1. La densité conjointe du couple aléatoire (X,Y) est $f(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$.
Faisons le changement de variable $\begin{cases} u &= 2x \\ v &= x-y \end{cases}$ qui établit une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Sa réciproque est :
$$\begin{cases} x &= \frac{u}{2} \\ y &= \frac{u}{2} - v \end{cases}$$
Le jacobien est
$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$
La densité conjointe $g(u,v)$ de (U,V) est donc égale à :
$$g(u,v) = f\left(\frac{u}{2}, \frac{u}{2} - v\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2} - v\right)^2\right)\right).$$

2. La densité marginale de U est :
$$g_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u,v)dv = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2} - v\right)^2\right)\right) dv$$
$$g_U(u) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{u}{2}\right)^2\right) . \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2} - v\right)^2\right)\right) dv$$
$$g_U(u) = \frac{1}{4\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{u}{2}\right)^2\right)\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2} - v\right)^2\right) dv$$
Faisons le changment de variable $t = \frac{u}{2} - v$, alors :
$$g_U(u) = \frac{1}{4\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{u}{2}\right)^2\right)\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
or
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi},$$
d'où
$$g_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{u^2}{4}\right), \text{ (loi } N(0, \sigma = 2));$$
De même, la densité marginale de V sera :
$$g_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u,v)du = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2} - v\right)^2\right) du$$

$$\begin{aligned} g_V(v) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2} - uv + v^2\right)\right) du \\ &= \frac{1}{4\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Soit le changement de variable $t = \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}}$, donc $du = \sqrt{2}dt$, et

$$g_V(v) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi},$$

d'où

$$g_V(v) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{4}\right), \text{ (loi } N(0, \sigma = \sqrt{2}));$$

Exercice 3 :
I.

1. Soitα réel strictement positif , on a :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$$

Posons $u = e^{-t}$, alors $u' = -e^{-t}$; et $v' = t^{\alpha-1}$, alors $v = \frac{t^\alpha}{\alpha}$. Par une intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \left[\frac{e^{-t}t^\alpha}{\alpha}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty} t^\alpha e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{(\alpha+1)-1}dt \end{aligned}$$

Donc $\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)$

2. La fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X est :

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx}f(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{tx}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta x}x^{\alpha-1}dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-x(\beta-t)}x^{\alpha-1}dx$$

cette intégrale est convergente si, et seulement si $\beta - t > 0$; placons-nous dans ce cas et faisons le changement de variable $x(\beta - t) = u$. On obtient

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{\beta-t}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{\beta-t}du \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\beta-t)^\alpha}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du \\ &= \frac{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)(\beta-t)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

À partir de $M(t)$, déterminons l'espérance mathématique et la variance de X. On a :

$$M(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha,$$

alors,

$$M'(t) = \beta^{\alpha}\left(\frac{-\alpha(-1)}{(\beta-t)^{\alpha+1}}\right) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta-t)^{\alpha+1}}$$

D'où

$$E(X) = M'(0) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{\beta^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$M''(t) = \alpha\beta^{\alpha}\frac{(-\alpha-1)(-1)}{(\beta-t)^{\alpha+2}} = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta^{\alpha}}{(\beta-t)^{\alpha+2}}$$

$$E(X^2) = M''(0) = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta^{\alpha}}{\beta^{\alpha+2}} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

Comme $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$, alors,

$$Var(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2+\alpha-\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

3. D'après la question (1) précédente, on a :
Comme $X_1 \rightsquigarrow \Gamma(\alpha_1,\beta)$ alors $M_{X_1}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_1}$, de même puisque $X_2 \rightsquigarrow \Gamma(\alpha_2,\beta)$ alors $M_{X_2}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_2}$.

$$M_{X_1+X_2}(t) = E\left(e^{t(X_1+X_2)}\right) = E\left(e^{t(X_1)}.e^{t(X_2)}\right)$$

Mais, comme X_1 et X_2 sont indépendantes, alors,

$$\begin{aligned} M_{X_1+X_2}(t) &= E\left(e^{t(X_1)}\right).E\left(e^{t(X_2)}\right) \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_1}.\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_2} \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_1+\alpha_2} \end{aligned}$$

qui n'est autre que la fonction génératrice des moments de la loi $\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$.
Donc $X_1+X_2 \rightsquigarrow \Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$.
Autre méthode :
On peut aussi le montrer directement, en cherchant la densité de probabilité de la somme $Z = X_1 + X_2$ des variables indépendantes $X_1 \rightsquigarrow \Gamma(\alpha_1,\beta)$ et $X_2 \rightsquigarrow \Gamma(\alpha_2,\beta)$.

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1)f(z-x_1)dx_1$$

$$g(z) = \int_0^z \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}e^{-\beta x_1}x_1^{\alpha_1-1}\frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}e^{-\beta(z-x_1)}(z-x_1)^{\alpha_2-1}dx_1$$

$$g(z) = \int_0^z \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}e^{-\beta z}x_1^{\alpha_1-1}(z-x_1)^{\alpha_2-1}dx_1$$

Soit le changement de variable $x_1 = tz$, alors $dx_1 = zdt$ et quand $x_1 = 0$ alors $t = 0$, quand $x_1 = z$, alors $t = 1$, d'où

$$g(z) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}e^{-\beta z}\int_0^1 (tz)^{\alpha_1-1}(z-tz)^{\alpha_2-1}zdt$$

$$g(z) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}e^{-\beta z}\int_0^1 (tz)^{\alpha_1-1}z^{\alpha_2}(1-t)^{\alpha_2-1}dt$$

$$g(z) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta z} \int_0^1 (t)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1} z^{\alpha_1+\alpha_2-1} dt$$

$$g(z) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta z} z^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^1 (t)^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1} dt$$

or $\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt = B(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$, donc,

$$g(z) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} e^{-\beta z} z^{\alpha_1+\alpha_2-1}; z \geqslant 0$$

qui est la densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi $\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$.

II.

1. Calcul direct de l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y g(y) dy = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 y y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} dy$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 y^{\alpha}(1-y)^{\beta-1} dy = \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha)}$$

Or $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(\alpha+\beta+1) = (\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$, donc,

$$E(Y) = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$, donc on doit calculer d'abord $E(Y^2)$.

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 g(y) dy = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 y^2 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} dy$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 y^{\alpha+1}(1-y)^{\beta-1} dy = \frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

D'où

$$Var(Y) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha^2+\alpha\beta-\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

2. Soit Y suit une loi bêta $Be(\alpha,\beta)$, et soit la variable aléatoire $T = 1-Y$

$$P(T \leqslant t) = P(1-Y \leqslant t) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \text{donc,} \quad 0 \leqslant 1-t \leqslant 1$$

$$= P(Y \geqslant 1-t) = 1 - P(Y \leqslant 1-t) = 1 - F_Y(1-t).$$

En dérivant par rapport à t, on obtient :

$$f_T(t) = f_Y(1-t)$$

$$\Rightarrow f_T(t) = g(1-t) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}(1-t)^{\alpha-1}(1-1+t)^{\beta-1}$$

$$\Rightarrow f_T(t) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}$$

Or

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$$

donc

$$f_T(t) = \frac{1}{B(\beta,\alpha)}t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}$$

D'où $T \rightsquigarrow \Gamma(\beta,\alpha)$