FP de Tétouan. Année : 2013 / 2014

Correction du rattrapage d'Algèbre I (S$_3$)

Problème n°1 : 1°) $* \; A \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, (par sa définition).

$* \; A \neq \emptyset$ car $M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ avec $a=b=0$

$*$ Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$; soient $M(a,b)$ et $M(c,d) \in A$

a-t-on $\alpha M(a,b) + \beta M(c,d) \,?\in?\, A$?

$$\alpha M(a,b) + \beta M(c,d) = \alpha \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c & d & d \\ d & c & d \\ d & d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha b \\ \alpha b & \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha b & \alpha a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta c & \beta d & \beta d \\ \beta d & \beta c & \beta d \\ \beta d & \beta d & \beta c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a+\beta c & \alpha b+\beta d & \alpha b+\beta d \\ \alpha b+\beta d & \alpha a+\beta c & \alpha b+\beta d \\ \alpha b+\beta d & \alpha b+\beta d & \alpha a+\beta c \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha a+\beta c, \alpha b+\beta d) \in A$$

A est, donc, stable par combinaison linéaire.

D'où, A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2°) Soit $M(a,b) \in A$

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$,

notons $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$M(a,b) = aI + bJ$$

D'où $\{I, J\}$ système générateur de $M_3(\mathbb{R})$.

3°) Montrons qu'il est libre. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que

$$\alpha I + \beta J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

D'où $\{I, J\}$ est libre.

4°) D'après les deux dernières questions, $\{I, J\}$ est une base de A. On a

$$\dim A = \text{card}\{I, J\} = 2.$$

Problème n° 2 :

$$\begin{cases} -x+y-z=-2 \\ 2x-2y-2z=4 \\ 3x-7y-z=10 \end{cases}$$

1°) L'écriture matricielle de ce système est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -7 & -1 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}}_{K}$$

D'où

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

2°) $$\det M = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -4 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$ où on a fait la somme des deux premières colonnes

On développe, après, suivant la $1^{\text{ère}}$ colonne :

$$\det M = (-4)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = (-4)(-2-2) = 16 \neq 0$$

D'où M est une matrice inversible.

3°) $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}\, {}^{t}\mathrm{com}(M)$

$$\mathrm{com}(M) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{com}(M) = \begin{pmatrix} -12 & -4 & -8 \\ 8 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^{t}\mathrm{com}(M) = \begin{pmatrix} -12 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -12 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

4°) le système est un système de CRAMER, il a une seule solution égale à $X = M^{-1}K$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problème n°3 :

1°) le polynôme caractéristique de la matrice B est :

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(en développant suivant la 1ère ligne).

$$\Rightarrow (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 1\right] - (1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\left[\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 1\right] - 1\right] = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\left[2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2\right] = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(1-\lambda)(\lambda - 3) = 0$$; donc $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 0$

la matrice B admet, donc, trois valeurs propres distinctes et elle est d'ordre 3. D'où B est diagonalisable (critère n°1)

<u>1er Cas :</u> $\lambda_1 = 3$

$$BX = 3X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - z = 3x \\ y - z = 3y \\ -x - y + 2z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = -\frac{1}{2}z \\ z \in \mathbb{R} \text{ (quelconque)} \end{cases}$$

$$E_3 = \left\{\left(-\tfrac{1}{2}z, -\tfrac{1}{2}z, z\right) / z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right) / z \in \mathbb{R}\right\}$$

<u>2eme Cas :</u> $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = x \\ y - z = y \\ -x - y + 2z = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y \in \mathbb{R} \text{ (quelconque)} \\ x = -y \end{cases}$$

$$E_1 = \{(-y, y, 0) / y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) / y \in \mathbb{R}\}$$

<u>3eme Cas :</u> $\lambda_3 = 0$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \text{ (quelconque)} \end{cases}$$

$$E_0 = \{(z, z, z) / z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, 1, 1) / z \in \mathbb{R}\}$$

<u>Conclusion :</u> 3 valeur propre, de vecteur propre associé $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

1 valeur propre, de vecteur propre associé $(-1, 1, 0)$
et 0 " " " " " $(1, 1, 1)$

2°)
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$